

DIETUS ELBL

ESSAI · TRADUCTION

Preuve et vérité

La recherche des preuves

Titre original : *Beweis und Wahrheit*

de Dietus Elbl

CET ESSAI DANS D'AUTRES LANGUES

Deutsch · English · Italiano

zahlen.cc · office@zahlen.cc

Kurt Gödel et son théorème d'incomplétude

PROUVABILITÉ ET VÉRITÉ

Kurt Gödel : « Über formal unentscheidbare Sätze der *principia mathematica* und verwandte Sätze » (Sur les propositions formellement indécidables des *principia mathematica* et des systèmes apparentés)

« Toutes les formulations axiomatiques non contradictoires de la théorie des nombres contiennent des énoncés indécidables. »

c'est-à-dire : il existe des énoncés qui ne sont *ni faux ni justes, mais indémontrables*, et pourtant vrais.

> « Ne lisez pas cette phrase ! » <

Il montra que, dans un système d'axiomes suffisamment riche qui englobe la théorie des nombres, il existe toujours des propositions qui ne peuvent pas être déduites des axiomes, bien que ces propositions soient vraies. La non-contradiction ne peut être démontrée que si l'on passe à un système plus vaste. Gödel montra que la *PROUVABILITÉ* est une notion plus faible que la *VÉRITÉ*, indépendamment du système axiomatique dont il s'agit.

L'idée de rendre les mathématiques « introspectives » était liée de façon extraordinairement féconde à la représentation d'un code *(« = numérotation de Gödel »)*, où des nombres représentent des symboles ou des suites de symboles. On peut donc comprendre les propositions de la théorie des nombres à deux niveaux différents :

* en tant qu'énoncé de la théorie des nombres
* en tant qu'énoncé *sur* des énoncés de la théorie des nombres

Dans cette section, je voudrais aborder le lien entre science, preuve et vérité. Le texte ci-dessus renvoie au mathématicien Kurt Gödel, qui s'est exprimé en détail à ce sujet. Ses travaux remarquables prouvent en principe la structure ouverte des systèmes vivants, qui sont reliés entre eux par le sens comme par un fil rouge et qui sont en relation les uns avec les autres par des rattachements fonctionnels hiérarchiques. Par des résonances, ceux-ci sont dirigés de façon cohérente et forment au total un organisme unitaire et orienté de façon symbiotique.

Les informations suivantes sur la personne de Gödel et sur le sujet se trouvent sur Internet comme dans d'innombrables livres ; je les ai réduites et condensées à l'essentiel.

Gödel montra en 1931 dans son œuvre principale : « Über formal unentscheidbare Sätze der *principia mathematica* und verwandte Sätze » (Sur les propositions formellement indécidables des *principia mathematica* et des systèmes apparentés), que, dans un système d'axiomes suffisamment riche qui englobe la théorie des nombres, il existe toujours des propositions qui ne peuvent pas être déduites des axiomes, bien que ces propositions soient vraies. La non-contradiction ne peut être démontrée que si l'on passe à un système plus vaste. Selon les découvertes de Gödel, les mathématiques sont plus qu'un système formel d'axiomes et de règles de déduction.

Dans sa version la plus absolument pure, la découverte de Gödel représente la traduction d'un très ancien paradoxe philosophique dans la langue des mathématiques. Il s'agit du paradoxe dit *d'Épiménide* ou *du menteur :*

Épiménide était un Crétois qui disait : « Tous les Crétois sont des menteurs »

Le théorème de Gödel : ***« Toutes les formulations axiomatiques non contradictoires de la théorie des nombres contiennent des énoncés indécidables. »***

L'idée qui se tenait derrière était la suivante : utiliser la pensée mathématique pour explorer la pensée mathématique elle-même. Cette idée de rendre les mathématiques « introspectives » fut extraordinairement féconde et conduisit entre autres au théorème d'incomplétude. Gödel reconnut qu'un énoncé de la théorie des nombres peut dire quelque chose sur un énoncé de la théorie des nombres lui-même, et la pièce maîtresse de sa construction est la représentation d'un code *(« = numérotation de Gödel »)*, où des nombres représentent des symboles ou des suites de symboles. Chaque énoncé de la théorie des nombres reçoit un nombre de Gödel, par lequel il peut être désigné. Et il devient ainsi possible de comprendre les propositions de la théorie des nombres à deux niveaux différents :

** en tant qu'énoncé de la théorie des nombres*
** en tant qu'énoncé sur des énoncés de la théorie des nombres*

L'œuvre de Gödel ne constitue qu'une partie des efforts de longue haleine des mathématiciens pour comprendre clairement ce que sont les ***preuves***. Il est important de retenir que les preuves opèrent à l'intérieur de systèmes fixes d'énoncés. Dans le cas de Gödel, le système fixe de raisonnements de la théorie des nombres auquel se rapporte le mot preuve est celui des *« principia mathematica » (p.m.)*, une œuvre gigantesque de *B. Russell* et *Alfred North Whitehead*, publiée de 1910 à 1913.

En langage courant, le théorème de Gödel signifie : pour cette proposition de la théorie des nombres, il n'existe dans le système des p.m. aucune preuve.
C'est-à-dire : le paradoxe n'est *ni faux ni juste, mais indémontrable*, et pourtant vrai. Il s'ensuit qu'il existe des énoncés vrais de la théorie des nombres pour la preuve desquels les méthodes des p.m. sont trop faibles. Gödel montra que la *prouvabilité* est une notion plus faible que la *vérité*, indépendamment du système axiomatique dont il s'agit.

En dernière conséquence, il s'ensuit que « prouvabilité » et « vérité » s'opposent de manière antagoniste. Si l'on s'occupe de « vérité absolue », il n'y a aucune possibilité de preuve, et si l'on se meut au niveau de la prouvabilité, il manque toujours une partie de la vérité.

PREUVE ET VÉRITÉ

Exemple

> *Une personne se tient à la lisière de la forêt et observe un chevreuil farouche que personne n'a encore jamais vu. Il reste visible un court instant puis disparaît de nouveau dans la forêt.*

Pour la personne concernée, l'expérience est authentique et vraie, mais pour la société elle reste un mythe (superposition) aussi longtemps qu'elle n'a pas été observée également par d'autres hommes. Comme personne ne peut savoir si l'animal en question réapparaîtra (ou s'il restera pour toujours dans la forêt, s'il meurt peut-être immédiatement après et ne pourra donc plus jamais devenir visible), la prouvabilité reste une énigme.

Cet exemple nous fait reconnaître que le processus de l'administration de la preuve est un argument plus faible que la vérité (réalité effective) de l'être (voir K. Gödel). Dans l'opération de la preuve, nous remplaçons la réalité effective du « cela est » par une copie partielle qui repose sur une ressemblance et un ordre compréhensibles. Si la réalité effective de la perception d'un objet est hautement illogique, la société refuse à cet événement le prédicat de vrai, sans égard à l'événement réel. Si personne (ou aucun expert) ne peut répéter les mêmes expériences (expérimentations), le fait reste établi dans le royaume de l'imagination. Il est évident que l'administration de la preuve ne peut jamais juger la vérité ou la réalité effective d'un événement de perception individuel et subjectif, mais présente comme noyau intérieur une définition restreinte de l'« état de cela-est » sous la forme d'une vision du monde collectivement acceptée.
La « preuve » en tant que telle est donc, malgré une définition équivoque, un processus de socialisation de la réalité effective, dans lequel sont fixés les aspects de la vérité entière accessibles à une élite (experts). Ainsi toute preuve de cette catégorie est totalement inappropriée pour saisir ou juger des vérités individuelles, parce qu'elles ne restituent pas des réalités primaires de l'être, mais définissent un processus d'approche de ces vérités subjectives saisissables individuellement.

De plus, le tout ne peut jamais être reconstruit sur la base d'un aspect partiel, ce qui, dans le cas de la forme d'administration de la preuve décrite ici, fait partie de celle-ci. L'accès collectif à la vérité passe par des médiateurs (experts, prêtres, chamans, etc.), ceux-ci jetant le pont de la possibilité à la réalité effective, un processus qui dépend des indices présents ou des soi-disant faits. Ceux-ci sont à leur tour liés à l'état des connaissances d'une société, ce qui représente une restriction radicale des possibilités de perception d'une culture. Ce qui n'est pas généralement accepté ne peut pas non plus être trouvé ailleurs, car pour admettre un fait ou une vérité, on a besoin d'un système ordonné qui permette l'intégration du nouveau.

LA NÉGATION ET LA FONCTION DU MIROIR DE LA PREUVE

La preuve, dans la compréhension positive idéaltypique, ne représente pas la réalité, mais la reflète et la copie en tant que négation. De même qu'un miroir, en tant qu'état permanent du vide originel, nie toute forme de réalité corporelle, la preuve est le négatif de la vérité telle qu'elle se présente dans l'instant unique. Le miroir nie le monde parce qu'il reflète tout et se refuse à accueillir en lui quoi que ce soit d'objectal. Ainsi aucune image du monde ne naît en son intérieur, ce qui laisse de côté la réalité corporelle.
La preuve – qui contient comme éléments centraux la répétabilité et une logique compréhensible – nie et copie en ce sens la vérité par son « ne-pas-être-ainsi » ou son contraire. Là où la vérité repose encore sur la spontanéité et le chaos, on trouve dans la preuve la répétabilité et une logique compréhensible, aspects qui manquent au cœur de la notion de vérité. De plus, la preuve reflète la vérité dans une chaîne fractale sans fin, et comme toute image en miroir, le miroir reflète la substance sans la contenir. La preuve illustre ainsi le chemin que la vérité subjective parcourt jusqu'à son intégration dans le corps de la société. Un chemin ne peut toutefois jamais être utilisé pour l'examen d'un fait et d'un instantané, c'est pourquoi une « preuve » en tant que telle est une contradiction en soi.

Si nous suivons la logique de référence idéaltypique et interprétons la vérité comme un instantané singulier et subjectivement expérimentable d'un état d'être, la preuve reflète cet instant déformé décimalement d'une dimension. Cette chaîne de preuves peut être prolongée à volonté et culmine dans une vérité plus vaste que celle présente au début. Le collectif contient toutes les images en miroir du même motif/objet originel en tant que « somme », la vérité primaire étant contenue, élargie, dans la valeur limite du résultat final.

par ex. : image originelle = vérité = archétype nombre 18

Comme première déformation décimale (premier miroir), nous trouvons le nombre 1.8, comme deuxième déformation décimale (deuxième miroir fractal) le nombre 0.18, et ainsi de suite. La somme résulte de :

$$\Sigma\ 18\ +1.8\ +0.18\ +\ 0.018\ +\ldots\ +\ =\ \Sigma\ 20$$

Dans ce processus, la vérité originelle reste toujours conservée, quoique déformée, et fournit avec la somme et le nombre 20 un élargissement qui va au-delà des différentes images autoréflexives.

Si la perception répétée de la vérité originelle est presque identique à celle-ci, alors la chaîne de preuves ne contient aucune information supplémentaire quant à la vérité primaire. Dans ce cas, l'instantané est reflété de façon fractale, mais non élargi, ce qui rend la preuve superflue, parce qu'aucune information nouvelle n'est ajoutée.

Si l'administration de la preuve en cours contient des informations déformées quant à la vérité primaire, l'image en miroir fractale n'est manifestement pas identique à la vérité et donc pas non plus ap-

propriée comme preuve. Nous reconnaissons ainsi le paradoxe immanent de la recherche de la vérité par une preuve : la force de la preuve réside dans la plus grande négation possible de la vérité.

Si preuve et vérité sont la même chose, la vérité subjective détermine l'output du système, car si la « vérité » est vraie, la preuve l'est aussi, et rien de plus. Si la perception originelle est une illusion, la preuve ne peut elle aussi que restituer cette illusion et est donc superflue. Si nous partons du principe que la preuve s'écarte plus ou moins de la vérité, il en résulte la conclusion simple que deux choses différentes sont présentes, en conséquence de quoi la preuve ne peut pas représenter la vérité.

La représentation de la vérité par la preuve se fait donc en tant que reflet *triplement négatif* :

Vérité	Preuve
chaos, irrationalité	logique compréhensible
singularité	répétabilité
instantané	processus

La chaîne d'indices de la preuve forme, de façon idéaltypique, l'aspect d'enveloppe de la vérité, laquelle incarne, au niveau de la conscience, en tant que part cardinale, le contenu ou le nectar qui est enchâssé dans le récipient de la preuve.

Traduction de l'original allemand de Dietus Elbl. zahlen.cc · office@zahlen.cc

CONCEPTION ET RÉALISATION LOTBLICK